

Progressão aritmética (PA)

Definição

Consideremos a seqüência (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16).

Observamos que, a partir do segundo termo, a diferença entre qualquer termo e seu antecessor é sempre a mesma:

$$4 - 2 = 6 - 4 = 10 - 8 = 14 - 12 = 16 - 14 = 2$$

Seqüências como esta são denominadas **progressões aritméticas (PA)**. A diferença constante é chamada de **razão** da progressão e costuma ser representada por **r**. Na PA dada temos $r = 2$.

Podemos, então, dizer que:

Progressão aritmética é a seqüência numérica onde, a partir do primeiro termo, todos são obtidos **somando** uma constante

São exemplos de PA:

- (5, 10, 15, 20, 25, 30) é uma PA de razão $r = 5$
- (12, 9, 6, 3, 0, -3) é uma PA de razão $r = -3$
- (2, 2, 2, 2, 2,...) é uma PA de razão $r = 0$

Notação

PA($a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$)

Onde:

a_1 = primeiro termo

a_n = último termo, termo geral ou n-ésimo termo

n = número de termos(se for uma PA finita)

r = razão

Exemplo: PA (5, 9, 13, 17, 21, 25)

$a_1 = 5$

$a_n = a_6 = 25$

$n = 6$

$r = 4$

Classificação

Quanto a razão:

- (5, 10, 15, 20, 25, 30) é uma PA de razão $r = 5$.
Toda PA de razão positiva ($r > 0$) é **crecente**.
- (12, 9, 6, 3, 0, -3) é uma PA de razão $r = -3$.
Toda PA de razão negativa ($r < 0$) é **decrecente**.
- (2, 2, 2, 2, 2, ...) é uma PA de razão $r = 0$.
Toda PA de razão nula ($r = 0$) é **constante ou estacionária**.

Quanto ao número de termos:

- (5, 15, 25, 35, 45, 55) é uma PA de 6 termos e razão $r = 10$.
Toda PA de n° de termos finito é **limitada**.
- (12, 10, 8, 6, 4, 2, ...) é uma PA de infinitos termos e razão $r = -2$.
Toda PA de n° de termos infinito é **ilimitada**.

Propriedades

P1: Três termos consecutivos

Numa PA, qualquer termo, a partir do segundo, é a **média aritmética** do seu antecessor e do seu sucessor.

Exemplo:

Consideremos a PA(4, 8, 12, 16, 20, 24, 28) e escolhamos três termos consecutivos quaisquer: 4, 8, 12 ou 8, 12, 16 ou ... 20, 24, 28.

Observemos que o termo médio é sempre a média aritmética dos outros dois termos:

$$\frac{4+12}{2} = 8, \frac{8+16}{2} = 12, \dots, \frac{20+28}{2} = 24$$

P2: Termo Médio

Numa PA qualquer de número ímpar de termos, o termo do meio(médio) é a **média aritmética** do primeiro termo e do último

Exemplo:

Consideremos a PA(3, 6, 9, **12**, 15, 18, 21) e o termo médio é **12**.

Observemos que o termo médio é sempre a média aritmética do primeiro e do último.

$$\frac{3 + 21}{2} = 12$$

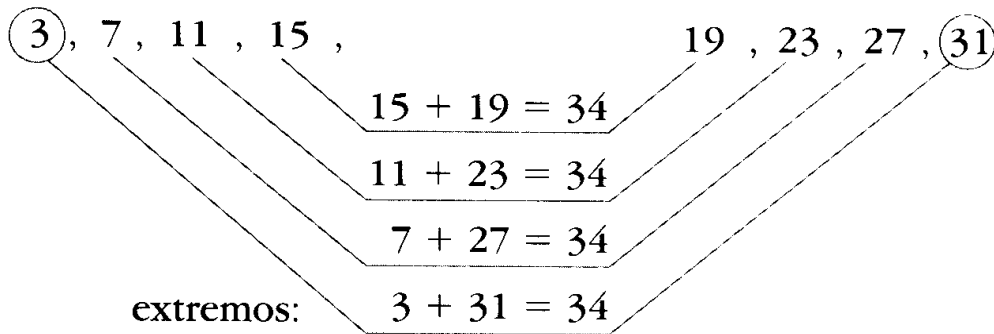
P3: Termos Equidistantes

A soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma PA finita é igual à soma dos extremos.

Exemplo:

Consideremos a PA(3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31).

$\left. \begin{array}{l} 7 \text{ e } 3 \\ 11 \text{ e } 23 \\ 15 \text{ e } 19 \end{array} \right\}$ são os termos equidistantes dos extremos 3 e 31



Termo Geral

Uma PA de razão r pode ser escrita assim:

$$PA(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n)$$

Aplicando a definição de PA, podemos escrevê-la de uma outra forma:

$$PA(\underbrace{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}}_{+r \quad +r \quad +r \quad +r}, \underbrace{a_n}_{+r})$$

$$PA(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r, a_1 + 4r, \dots, a_1 + (n-1)r)$$

Portanto, o termo geral será:

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \text{ para } n \in \mathbb{N}^*$$

Exercícios Resolvidos

1. Determine o quarto termo da PA(3, 9, 15,...).

Resolução:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 9$$

$$r = a_2 - a_1 = 9 - 3 = 6$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

$$+r \quad +r \quad +r$$

Então:

$$a_4 = a_1 + r + r + r$$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

$$a_4 = 3 + 3 \cdot 6$$

$$a_4 = 3 + 18$$

$$a_4 = 21$$

2. Determine o oitavo termo da PA na qual $a_3 = 8$ e $r = -3$.

Resolução:

$$a_3 = 8$$

$$r = -3$$

$$(a_1, \dots, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \dots)$$

$$+r \quad +r \quad +r \quad +r \quad +r \quad +r$$

Então:

$$a_8 = a_3 + r + r + r + r + r$$

$$a_8 = a_3 + 5r$$

$$a_8 = 8 + 5 \cdot (-3)$$

$$a_8 = 8 - 15$$

$$a_8 = -7$$

3. Interpole 3 meios aritméticos entre 2 e 18.

Resolução:

Devemos formar a PA(2, __, __, __, 18), em que:

$$a_1 = 2$$

$$a_n = a_5 = 18$$

$$n = 2 + 3 = 5$$

Para interpolarmos os três termos devemos determinar primeiramente a razão da PA. Então:

$$a_5 = a_1 + r + r + r + r$$

$$a_5 = a_1 + 4r$$

$$18 = 2 + 4r$$

$$16 = 4r$$

$$r = 16/4$$

$$r = 4$$

Logo temos a PA(2, 6, 10, 14, 18)

Soma dos Termos de uma PA finita

Consideremos a seqüência (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20).

Trata-se de uma PA de razão 2. Suponhamos que se queira calcular a soma dos termos dessa seqüência, isto é, a soma dos 10 termos da PA(2, 4, 6, 8, ..., 18,20).

Poderíamos obter esta soma manualmente, ou seja, $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20 = 110$. Mas se tivéssemos de somar 100, 200, 500 ou 1000 termos? Manualmente seria muito demorado. Por isso precisamos de um modo mais prático para somarmos os termos de uma PA. Na PA(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20) observe:

$$a_1+a_{10} = 2 + 20 = 22$$

$$a_2+a_9 = 4 + 18 = 22$$

$$a_3+a_8 = 6 + 16 = 22$$

$$a_4+a_7 = 8 + 14 = 22$$

$$a_5+a_6 = 10 + 12 = 22$$

Note, que a soma dos termos eqüidistantes é constante (sempre 22) e apareceu exatamente 5 vezes (metade do número de termos da PA, porque somamos os termos dois a dois). Logo devemos ao invés de somarmos termo a termo, fazermos apenas $5 \times 22 = 110$, e assim, determinamos $S_{10} = 110$ (soma dos 10 termos).

E agora se fosse uma progressão de 100 termos como a PA(1, 2, 3, 4,...,100), Como faríamos?

Procederemos do mesmo modo. A soma do a_1 com a_{100} vale 101 e esta soma vai se repetir 50 vezes (metade de 100), portanto $S_{100} = 101 \times 50 = 5050$.

Então para calcular a soma dos n termos de uma PA somamos o primeiro com o último termo e esta soma irá se repetir $n/2$ vezes. Assim podemos escrever:

$$S_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2}$$

Exercícios Resolvidos

1. Calcule a soma dos 50 primeiros termos da PA(2, 6, 10,...).

Resolução:

$$a_1 = 2$$

$$r = a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4$$

Para podemos achar a soma devemos determinar o a_n (ou seja, a_{50}):

$$a_{50} = a_1 + 49r = 2 + 49 \cdot 4 = 2 + 196 = 198$$

Aplicando a fórmula temos:

$$S_{50} = (a_1 + a_n) \cdot n / 2 = (2 + 198) \cdot 50 / 2 = 200 \cdot 25 = 5000$$

2. Um ciclista percorre 20 km na primeira hora; 17 km na segunda hora, e assim por diante, em progressão aritmética. Quantos quilômetros percorrerá em 5 horas?

Resolução:

PA(20, 17, 14,...)

$$a_1 = 20$$

$$r = a_2 - a_1 = 17 - 20 = -3$$

Para podemos achar quantos quilômetros ele percorrerá em 5 horas devemos somar os 5 primeiros termos da PA e para isto precisamos do a_n (ou seja, a_5):

$$a_5 = a_1 + 4r = 20 + 4 \cdot (-3) = 20 - 12 = 8$$

Aplicando a fórmula temos:

$$S_{50} = (a_1 + a_n) \cdot n / 2 = (20 + 8) \cdot 5 / 2 = 14 \cdot 5 = 70$$

Logo ele percorreu em 5 horas 70 km.